

# Control de Lyapunov en tiempo discreto de máquinas de inducción

Aurelio García Cerrada José Daniel Muñoz Frías

ETS de Ingeniería (ICAI), Universidad Pontificia Comillas, Alberto Aguilera 23, 28015 Madrid, Spain

Tel. 91 542 28 00 Fax. 91 559 65 69 e-mail: aurelio@iit.upco.es daniel@dea.icae.upco.es

## Resumen

Basándose en un modelo de tercer orden de un motor de inducción se diseña un control de Lyapunov<sup>1</sup> que garantiza la convergencia exponencial a cero de los errores de seguimiento. Se presentan dos controladores, uno implantado en ejes de estator y otro implantado en ejes de flujo de rotor, con el que se consiguen mejores prestaciones. En este último caso se ha incluido un estimador de orden reducido del flujo, también en ejes de flujo, obteniendo un comportamiento satisfactorio del conjunto. Todos los controladores se han simulado en tiempo discreto usando un inversor controlado en corriente. En este trabajo se ha investigado mediante simulación la influencia del tiempo de muestreo en el sistema de control.

## 1. Nomenclatura

|             |                                                   |
|-------------|---------------------------------------------------|
| $(\cdot)^s$ | Magnitud en ejes d-q solidarios al estator        |
| $(\cdot)^r$ | Magnitud en ejes d-q solidarios al flujo de rotor |
| $(\cdot)_d$ | Componente en eje d                               |
| $(\cdot)_q$ | Componente en eje q                               |
| $L_S, L_R$  | Autoinductancias del estator y del rotor          |
| $R_S, R_R$  | Resistencias del estator y del rotor              |
| $M$         | Inductancia mutua                                 |
| $\sigma$    | Factor de pérdidas $(1 - M^2/L_S L_R)$            |
| $P$         | Número de polos                                   |
| $J$         | Inercia del accionamiento                         |

## 2. Introducción

El motor de inducción es una planta no lineal que se modela con cinco variables de estado, de las cuales dos no son directamente medibles. Además presenta grandes variaciones en sus parámetros (especialmente la resistencia de rotor) y en el par de carga, que puede verse como una perturbación al sistema. Esto, junto a su indudable importancia en la industria, hace de esta planta un banco de pruebas ideal para la aplicación de técnicas de control no lineal. Una de las técnicas más estudiadas en la literatura es la linealización entrada-salida [1] en la que mediante una realimentación no lineal se consigue linealizar el sistema. Sin embargo no existen en la literatura aplicaciones prácticas de esta metodología a motores de inducción. En [2] se ha investigado la influencia del periodo de muestreo en un controlador de

este tipo y se ha observado que dicho controlador es poco robusto. En el presente trabajo se analiza una alternativa que hace tender exponencialmente a cero los errores de seguimiento y que resulta ser muy robusta cuando se aplica en tiempo discreto.

## 3. Fundamentos del Control de Lyapunov

Si se considera un sistema dinámico de la forma:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

y se definen los errores de seguimiento como  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_r$ , se puede establecer como candidata a función de Lyapunov para garantizar la estabilidad del sistema en bucle cerrado:

$$V_t = \frac{1}{2} \sum_i \tilde{y}_i^2 \quad (2)$$

La derivada de  $V_t$  viene dada por:

$$\frac{d}{dt} V_t = \sum_i \tilde{y}_i \frac{d}{dt} \tilde{y}_i = \sum_i \tilde{y}_i \left( \frac{d}{dt} y_i - \frac{d}{dt} y_{ir} \right) \quad (3)$$

como [3]<sup>2</sup>:

$$\frac{d}{dt} y_i = L_f h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} h_i(\mathbf{x}) u_j \quad (4)$$

la ecuación (3) se convierte en:

$$\frac{d}{dt} V_t = \sum_i \tilde{y}_i \left( L_f h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} h_i(\mathbf{x}) u_j - \frac{d}{dt} y_{ir} \right)_{(5)}$$

Si el grado relativo<sup>3</sup> de todas las salidas es uno, para cada salida  $y_i$  en (5), al menos uno de los términos  $L_{g_j} h_i(\mathbf{x})$  será distinto de cero y la entrada  $u_j$  aparecerá en dicha ecuación. Entonces, se puede diseñar el controlador  $\mathbf{u}$  de modo que se cumpla  $\frac{d}{dt} \tilde{y}_i = -k_i \tilde{y}_i$  para

<sup>2</sup>  $L_f^r h$  es la derivada de Lie de orden  $r$  de la función  $h$  con respecto al campo vectorial  $\mathbf{f}$ .

<sup>3</sup> Por grado relativo de una salida se entiende el número de veces que hay que derivar dicha salida para que aparezca al menos una de las entradas del sistema en la expresión de la derivada.

<sup>1</sup> Este tipo de planteamiento se conoce en la literatura como "output-feedback", pero este término no explica ninguna de sus características diferenciales. Así se ha preferido llamarle "de Lyapunov" en clara referencia a su característica fundamental.

cada una de las salidas, con lo que los errores de seguimiento tienden exponencialmente a cero con constante de tiempo  $1/k_i$  y (3) se convierte en:

$$\frac{d}{dt} V_t = \sum_i -k_i \tilde{y}_i^2 \quad (6)$$

con lo que la función (2) será una función de Lyapunov que garantiza la estabilidad del sistema.

Conviene señalar que un valor de  $k_i$  alto hace al sistema más robusto frente a perturbaciones, de una forma similar a la ganancia en un controlador proporcional, pero también hace que la respuesta del sistema sea mucho más rápida, lo que se traduce en saturaciones en el mando si las referencias varían bruscamente. Este inconveniente se soluciona en este trabajo haciendo que las referencias sigan rampas de una pendiente determinada en lugar de escalones.

#### 4. Control de Lyapunov de la máquina de inducción en ejes de estator [4]

El modelo de la máquina de inducción en ejes d-q fijos al estator, tomando como variables de estado las corrientes de estator, los flujos de rotor y la velocidad de giro del motor<sup>4</sup>, puede expresarse como [5]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd}^s \\ i_{sq}^s \\ \psi_{rd}^s \\ \psi_{rq}^s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 & B & C\omega_R \\ 0 & A & -C\omega_R & B \\ D & 0 & E & -\omega_R \\ 0 & D & \omega_R & E \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} i_{sd}^s \\ i_{sq}^s \\ \psi_{rd}^s \\ \psi_{rq}^s \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_{sd}^s \\ u_{sq}^s \end{bmatrix}}_u \quad (7)$$

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{P}{2J}(m_e - m_l) \quad (8)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{R_S}{L_S\sigma} - \frac{R_R(1-\sigma)}{L_R\sigma} & B &= \frac{MR_R}{\sigma L_S L_R^2} \\ C &= \frac{M}{\sigma L_S L_R} & D &= \frac{MR_R}{L_R} \\ E &= -\frac{R_R}{L_R} & F &= \frac{1}{\sigma L_S} \\ m_e &= G(\psi_{rd}^s i_{sq}^s - \psi_{rq}^s i_{sd}^s) & G &= \frac{PM}{2L_R} \end{aligned} \quad (9)$$

Si se definen como salidas del sistema la velocidad y el módulo al cuadrado del vector de flujo en ejes d-q:

$$y_1 = |\psi|^2 = \psi_{rd}^s{}^2 + \psi_{rq}^s{}^2 \quad (10)$$

$$y_2 = \omega_R \quad (11)$$

<sup>4</sup>expresada en radianes eléctricos.

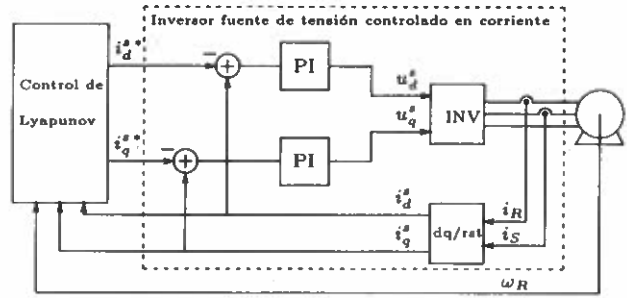


Fig. 1. Diagrama de bloques del accionamiento.

la función de Lyapunov de los errores de seguimiento queda:

$$V_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \tilde{y}_i^2 = \frac{1}{2} (\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2) \quad (12)$$

y su derivada puede calcularse, aplicando (5):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_t &= \tilde{y}_1 \left( 2D (\psi_{rd}^s i_{sq}^s + \psi_{rq}^s i_{sd}^s) + 2E|\psi|^2 - \frac{d}{dt} |\psi|^2 \right) + \\ &+ \tilde{y}_2 \left( \frac{P}{2J} (G (\psi_{rd}^s i_{sq}^s - \psi_{rq}^s i_{sd}^s) - m_l) - \frac{d}{dt} \omega_{Rr} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Nótese que las salidas del sistema tienen un grado relativo superior a uno si se toman como entradas las tensiones. Sin embargo, si se usan como entradas al sistema las corrientes, el grado relativo respecto a las nuevas entradas es de uno y pueden aplicarse los resultados de la Sección 3. Para que se cumpla (6), de la ecuación (13) se deduce que:

$$\begin{bmatrix} 2D (\psi_{rd}^s i_{sq}^s + \psi_{rq}^s i_{sd}^s) + 2E|\psi|^2 - \frac{d}{dt} |\psi|^2 \\ \frac{P}{2J} (G (\psi_{rd}^s i_{sq}^s - \psi_{rq}^s i_{sd}^s) - m_l) - \frac{d}{dt} \omega_{Rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \tilde{y}_1 \\ -k_2 \tilde{y}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Y resolviendo (14):

$$\begin{bmatrix} i_{sd}^s \\ i_{sq}^s \end{bmatrix} = \frac{1}{|\psi|^2} \begin{bmatrix} \psi_{rd}^s & -\psi_{rq}^s \\ \psi_{rq}^s & \psi_{rd}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_1 \tilde{y}_1 + \frac{d}{dt} |\psi|^2 - 2E|\psi|^2 \\ \frac{(-k_2 \tilde{y}_2 + \frac{d}{dt} \omega_{Rr}) \frac{2J}{P} + m_l}{G} \end{bmatrix} \quad (15)$$

El actuador, por tanto, debe ser un inversor controlado por corriente. Un diagrama de bloques del accionamiento se muestra en la figura 1.

#### 4.1. Resultados de simulación del controlador en coordenadas de estator

Para estudiar el comportamiento del controlador se ha simulado un accionamiento basado en un motor de inducción de 15 kW, cuyos parámetros se encuentran en el apéndice A. El motor se simula en tiempo continuo usando el modelo en ejes d-q de estator mostrado en las ecuaciones (7), (8) y (9). El controlador se implanta en tiempo discreto y el inversor se simula como un retenedor de orden cero<sup>5</sup>.

Para conseguir bajas frecuencias de muestreo en el controlador de corriente se eligen  $k_1 = 1000$  y  $k_2 = 10$  de

<sup>5</sup>En el resto de simulaciones del presente artículo lo único que cambia es el controlador, simulándose el motor y el inversor de la misma manera.

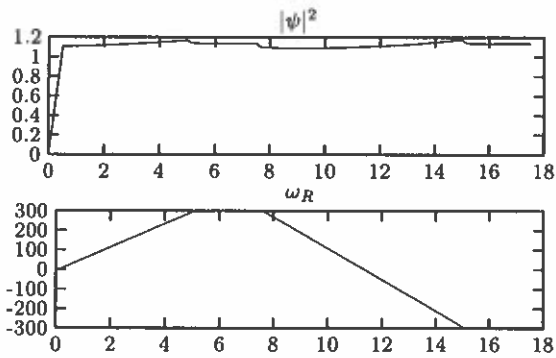


Fig. 2. Evolución de las salidas (1 kHz). Eje x en seg. Ejes y en  $Wb^2$  y  $rad/s$ .

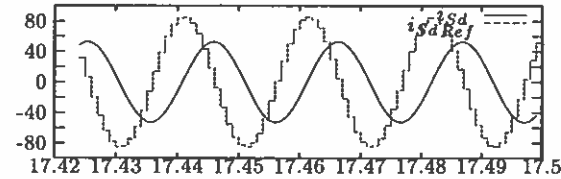


Fig. 3. Evolución del controlador de corriente (1 kHz). Eje x en seg. Eje y en A.

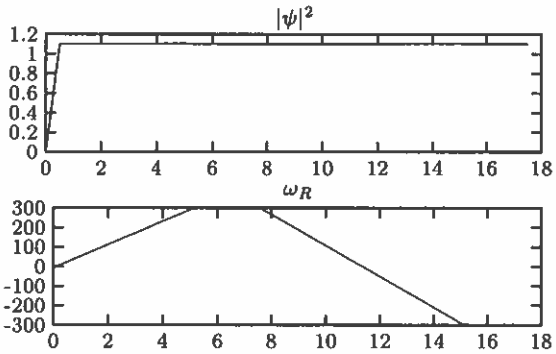


Fig. 4. Evolución de las salidas (10 KHz). Eje x en seg. Ejes y en  $Wb^2$  y  $rad/s$ .

forma que los controladores de Lyapunov sean robustos frente a errores en dicho controlador de corriente. Se han aplicado controladores de corriente PI de segundo orden con constante de tiempo de 5 ms y con un amortiguamiento de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , implantándose todos ellos con un periodo de muestreo de 1 ms<sup>6</sup>. En la Figura 2 se muestra un arranque de la máquina seguido de un cambio de giro, en la que se aprecia un cierto acoplamiento entre el flujo y la velocidad en los transitorios de ésta. Nótese, sin embargo, que el control desacoplado de flujo y par es la característica más importante de los accionamientos de altas prestaciones. En la figura 3 se muestra la respuesta del controlador de corriente, que, aunque nada satisfactoria, no impide que los controladores de Lyapunov funcionen correctamente. Si se aumenta la frecuencia de muestreo a 10 kHz y se sitúa  $k_1 = 10000$  el acoplamiento entre el flujo y la velocidad es inapreciable<sup>7</sup>, pese a que los controladores de corriente se diseñan igual que antes, tal como se ve en la Figura 4.

<sup>6</sup>Sólo se rediseñan en tiempo discreto los controladores de corriente. El controlador de Lyapunov se implanta según (15)

<sup>7</sup>No se puede aumentar  $k_1$  sin aumentar la frecuencia debido a que  $1/k_1$  es la constante de tiempo del sistema, la cual no ha de ser menor del periodo de muestreo.

## 5. Control de Lyapunov de la máquina de inducción en ejes de flujo

El controlador de Lyapunov se puede plantear también en ejes de flujo. Las magnitudes en los nuevos ejes son continuas o de variación lenta, lo que implica una menor exigencia de velocidad a los controladores. El modelo del motor en ejes d-q solidarios al flujo de rotor puede expresarse como [5]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \\ \psi_{rd}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \omega_s & B \\ -\omega_s & A & -C\omega_r \\ D & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \\ \psi_{rd}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd}^r \\ u_{sq}^r \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\psi_{rq}^r = 0$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{P}{2J}(m_e - m_l) \quad (17)$$

$$m_e = G\psi_{rd}^r i_{sq}^r$$

en donde  $\omega_s$  es la velocidad de giro de los ejes y viene dada por:

$$\omega_s = \omega_r + \frac{D i_{sq}^r}{\psi_{rd}^r} \quad (18)$$

Si se definen como salidas del sistema el flujo en eje d (que coincidirá con su módulo) y la velocidad de giro del rotor:

$$y_1 = \psi_{rd}^r$$

$$y_2 = \omega_r$$

la función de Lyapunov de los errores de seguimiento queda:

$$V_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \tilde{y}_i^2 = \frac{1}{2} (\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2) \quad (19)$$

cuya derivada viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_t = & \tilde{y}_1 \left( D i_{sd}^r + E \psi_{rd}^r + 0 - \frac{d}{dt} \psi_{rd}^r \right) + \\ & + \tilde{y}_2 \left( \frac{P}{2J} (G \psi_{rd}^r i_{sq}^r - m_l) + 0 - \frac{d}{dt} \omega_r \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Al igual que en el control de ejes de estator es necesario usar las componentes de la corriente ( $i_{sd}^r, i_{sq}^r$ ) como entradas al sistema, de forma que el grado relativo de las salidas respecto a estas entradas sea uno. En este punto pueden aplicarse los resultados de la Sección 3. Por tanto para que se cumpla (6), de la ecuación (20) se deduce que:

$$\begin{bmatrix} D i_{sd}^r + E \psi_{rd}^r - \frac{d}{dt} \psi_{rd}^r \\ \frac{P}{2J} (G \psi_{rd}^r i_{sq}^r - m_l) - \frac{d}{dt} \omega_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \tilde{y}_1 \\ -k_2 \tilde{y}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

de donde puede obtenerse que:

$$\begin{bmatrix} i_{sd}^r \\ i_{sq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_1 \tilde{y}_1 - E \psi_{rd}^r + \frac{d}{dt} \psi_{rd}^r}{D} \\ \frac{(-k_2 \tilde{y}_2 + \frac{d}{dt} \omega_r) \frac{2J}{P} + m_l}{G \psi_{rd}^r} \end{bmatrix} \quad (22)$$

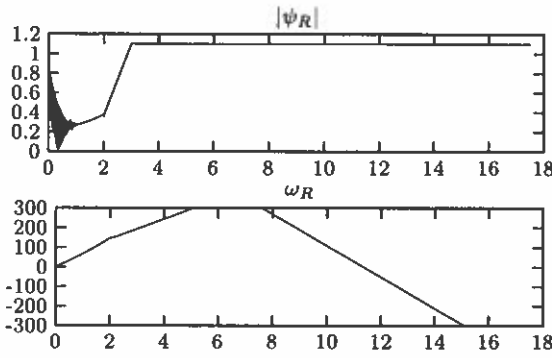


Fig. 5. Evolución de las salidas con los controladores implantados en ejes de flujo (1 kHz) y con arranque sin controlar. Eje x en seg. Ejes y en Wb y  $\text{rad}_{el}/s$ .

### 5.1. Resultados de simulación del controlador en ejes de flujo.

En la Figura 5 se muestran los resultados para el mismo diseño de controladores que el realizado en la Sección 4.1. El acoplamiento entre flujo y velocidad es ahora inapreciable, pese a que el controlador se implanta a 1 kHz. Sin embargo se han observado problemas en el arranque cuando la frecuencia de muestreo es baja debido a que inicialmente el flujo aún no está establecido y los ejes no se orientan correctamente. Para solucionarlo se arranca el motor sin controlar para que se establezca el flujo y posteriormente se conecta el controlador de Lyapunov.

### 6. Estimador de orden reducido en ejes de flujo

Con el objeto de ilustrar las prestaciones del controlador propuesto en una situación real en la que el flujo ha de ser estimado, se ha incorporado un estimador en ejes de flujo de orden reducido. A partir del modelo de la máquina y de la velocidad de giro de los ejes se obtiene [5]:

$$\frac{d\hat{\psi}_{Rd}^r}{dt} = D\hat{i}_{Sd}^r + E\hat{\psi}_{Rd}^r \quad (23)$$

$$\hat{\omega}_S = \omega_R + \frac{D\hat{i}_{Sq}^r}{\hat{\psi}_{Rd}^r} \quad (24)$$

El diseño del controlador es igual al realizado en la Sección 5 substituyendo el flujo por su estimación. Así pues las ecuaciones del controlador son:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{Sd}^r \\ \hat{i}_{Sq}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \hat{y}_1' - E\hat{\psi}_{Rd}^r + \frac{d}{dt}\hat{\psi}_{Rd}^r \\ \left( \frac{-k_2 \hat{y}_2 + \frac{d}{dt}\omega_R}{G\hat{\psi}_{Rd}^r} \right) \frac{2\hat{\psi}_{Rd}^r}{P} + m_l \end{bmatrix} \quad (25)$$

en donde  $\hat{y}_1' = \hat{\psi}_{Rd}^r - \psi_{Rd}^r$ .

### 6.1. Resultados de simulación

En la Figura 6 se muestra una simulación del sistema incluyendo el estimador de flujo. El diseño de los controladores es el mismo que el realizado en la Sección 5.1, pero en este caso se degrada un poco el comportamiento debido a la simplicidad del estimador elegido. Se aprecia ahora un acoplamiento entre el flujo y la velocidad

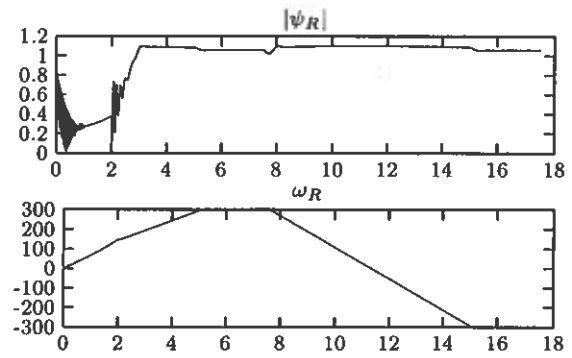


Fig. 6. Evolución de las salidas con controlador de Lyapunov y estimador de orden reducido en ejes de flujo (1 kHz). Eje x en seg. Ejes y en Wb y  $\text{rad}_{el}/s$ .

y además existe un error en régimen permanente del 3.67% para el flujo y de 0.093% para la velocidad.

## 7. Conclusiones

En el presente trabajo se ha investigado la aplicación de un controlador de Lyapunov a un motor de inducción. Dicha aplicación se ha realizado en ejes de estator y en ejes de flujo de rotor; observándose un mejor comportamiento en el segundo caso a bajas frecuencias de muestreo. Por último se ha comprobado el funcionamiento correcto del controlador en ejes de flujo de rotor cuando se usa un simulador de las ecuaciones del flujo para estimarlo. En todos los casos se consigue controlar por separado el flujo y la velocidad, de la misma manera que con un control vectorial clásico.

### A. Parámetros del motor

|                                       |                        |
|---------------------------------------|------------------------|
| $R_R = 0.17750 \Omega$                | $R_S = 0.22428 \Omega$ |
| $L_R = 0.041563 H$                    | $L_S = 0.041327 H$     |
| $M = 0.040030 H$                      | $P = 4 \text{ Polos}$  |
| $J = 5 \text{ kgr} \times \text{m}^2$ | Potencia = 15 kW       |
| $V_{nom} = 380 V$                     | $I_{nom} = 33.5 A$     |

### Referencias

- [1] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, London, third edition, 1995.
- [2] J. D. Muñoz Frías and A. García Cerrada. Control mediante linealización entrada-salida del motor de inducción. In *Seminario anual de electrónica y automática industrial*, Septiembre 1998.
- [3] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- [4] R. Marino, S. Peresada, and P. Tomei. Output feedback control of current-fed induction motors with unknown rotor resistance. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 4(4):336-347, July 1996.
- [5] A. García Cerrada. *Observer-based field-oriented controller for an inverter-fed traction induction motor drive*. PhD thesis, University of Birmingham, December 1991.